QUESTÕES

1. Dar alguns exemplos de movimentos que sejam aproximadamente harmônicos simples. Por que os movimentos realmente harmônico-simples são raros?

2. Uma mola tem constante de força k e nela está suspensa uma massa m. A mola é cortada ao meio e a mesma massa suspensa de uma das metades. A freqüência de vibração será a mesma antes e depois de cortar a mola? Como se relacionam as freqüências?

3. Uma mola não deformada tem constante elástica k. Ela é distendida por um peso colocado em sua extremidade, até um comprimento bastante inferior ao limite elástico. A mola terá a mesma constante elástica k para deslocamentos produzidos a partir dessa nova posição de equilíbrio?

4. Qualquer mola real tem massa. Tomando esta em conta, explicar qualitativamente como ela modificará a expressão do período de oscilação de um sistema mola-massa (ver Probl. 40).

5. Suponha que temos um bloco de massa desconhecida e uma mola de constante elástica também ignorada. Mostrar como se pode predizer o período de oscilação deste sistema mola-bloco, simplesmente medindo a distensão produzida na mola quando o bloco é suspenso nela.

6. Pode haver um oscilador que, mesmo para pequenas amplitudes, não seja harmônico simples? Isto é, pode-se ter uma força restauradora não linear em um oscilador mesmo se as amplitudes forem arbitrariamente pequenas?

7. Seria possível construir um pêndulo simples?

8. Os padrões de massa, de comprimento e de tempo poderiam basear-se nas propriedades de um pêndulo? Explique.

9. Mostrar que, ao aproximar-se de 180° a amplitude θ_m da Eq. 15-20, o período aproxima-se de ∞. Isto é razoável?

10. Predizer, por argumentos qualitativos, se um pêndulo que oscila com grande amplitude terá período maior ou menor do que o período de oscilação para pequenas amplitudes (considere casos extremos).

11. Como o período de um pêndulo afetado quando seu ponto de suspensão é (*a*) deslocado horizontalmente, com aceleração a; (*b*) deslocado verticalmente com aceleração a dirigida para cima; (*c*) deslocado verticalmente com aceleração a dirigida para baixo, sendo $a < g$. Algum desses casos se aplica a um pêndulo montado em um carro que desce por um plano inclinado?

12. Por que, ao usar a Eq. 15-26 para determinar I, foi excluída a hipótese de o eixo de rotação passar pelo centro de massa? Como se pode determinar I em relação a tal eixo, usando um pêndulo físico?

13. Enche-se com água uma esfera oca, através de um pequeno orifício. A esfera é suspensa mediante um longo fio e, à proporção que a água escapa lentamente pelo orifício, no fundo, verifica-se que o período de oscilação a princípio aumenta e depois diminui. Explique.

14. Dois pêndulos, cada um consistindo de um disco ligado a uma leve barra, são idênticos exceto quanto à ligação entre disco e barra. Em um deles a barra está montada rigidamente no disco; no outro existem rolamentos, de forma que o disco pode girar livremente em torno da extremidade da barra, por exemplo. Suspendem-se ambos os pêndulos, eles são afastados igualmente de suas posições de equilíbrio e abandonados. Qual deles terá maior período? Explique.

15. Como se pode usar um pêndulo para traçar uma senóide?

16. Que movimentos harmônicos simples deveriam ser compostos para que o movimento resultante tivesse como trajetória um oito?

17. Existe alguma conexão entre a relação F como função de x, ao nível molecular, e a relação macroscópica entre F e x em uma mola?

18. Por que em algumas máquinas usam-se dispositivos amortecedores? Dar um exemplo.

19. Dar alguns exemplos de fenômenos comuns em que a ressonância desempenha papel importante.

20. As marés oceânicas lunares são muito mais importantes do que as solares (ver Questão 13, Cap. 16, por exemplo). Entretanto, dá-se o contrário com as marés na atmosfera terrestre. Explique isto, usando idéias de ressonância, dado que a atmosfera tem um período natural de oscilação aproximadamente igual a 12 horas.

PROBLEMAS

1. Um bloco de 4,0 kg distende de 16 cm uma mola, em relação a seu comprimento natural. O bloco é removido e em seu lugar suspende-se um corpo de 0,50 kg. Distendendo então a mola e largando o corpo, qual será o período de seu movimento?

2. Uma massa de 2,0 kg está suspensa de uma mola. Suspendendo da massa um corpo de 300 gramas, provoca-se uma distensão adicional de 2,0 cm. Removendo a seguir o corpo de 300 g e pondo em vibração a massa, determinar o período de seu movimento.

3. Um pequeno corpo de 0,10 kg executa movimento harmônico simples de 1,0 m de amplitude e período de 0,20 s. (*a*) Qual o valor máximo da força que atua nele? (*b*) Se as oscilações são produzidas por uma mola, qual sua constante elástica?

4. Um corpo oscila com movimento harmônico simples cuja equação é

$$x = 6{,}0 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ metros.}$$

Determinar: (*a*) o deslocamento, (*b*) a velocidade e (*c*) a aceleração, no instante $t = 2$ segundos. Determinar também (*d*) a fase, (*e*) a freqüência e (*f*) o período do movimento.

5. Uma partícula executa movimento harmônico linear em torno do ponto $x = 0$; no instante $t = 0$ seu deslocamento é $x = 0{,}37$ cm e sua velocidade é nula. Se a freqüência do movimento for 0,25 Hz, determinar (*a*) o período, (*b*) a freqüência angular, (*c*) a amplitude, (*d*) o deslocamento no instante arbitrário t, (*e*) a velocidade no instante t, (*f*) a velocidade máxima, (*g*) a aceleração máxima, (*h*) o deslocamento no instante $t = 3{,}0$ s, (*i*) a velocidade para $t = 3{,}0$ s.

6. Duas partículas executam movimento harmônico simples de mesmas amplitudes e freqüências, ao longo da mesma reta. Elas se cruzam quando, movendo-se em sentidos opostos, seus deslocamentos igualam a metade da amplitude. Qual a diferença de fase entre elas?

7. Um bloco está sobre uma superfície horizontal que se move horizontalmente com movimento harmônico simples cuja freqüência é de 2 Hz. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície é 0,50. Que valor pode ter a amplitude, se o bloco não escorrega na superfície?

8. Um bloco está sobre um pistão que se move verticalmente com movimento harmônico simples de período igual a 1,0 s. (*a*) Para que amplitude do movimento o bloco se separa do pistão? (*b*) Se o pistão tiver amplitude de 5,0 cm, qual a freqüência máxima para a qual o bloco e o pistão permanecerão continuamente em contato?

9. Uma mola uniforme, cujo comprimento sem distensão é l, tem constante elástica k. A mola é partida em duas, cujos comprimentos sem distensão são l_1 e l_2, com

$l_1 = nl_2$, n sendo inteiro. Quais as constantes elásticas correspondentes k_1 e k_2, em função de n e de k? Verificar seus resultados para $n = 1$ e $n = \infty$.

10. Ligam-se duas molas e no extremo de uma delas coloca-se uma massa m, conforme a Fig. 15-22. As superfícies são lisas. Se as molas, separadas, têm constantes elásticas k_1 e k_2, mostrar que a freqüência de oscilação de m é

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)\, m}}.$$

(Dois capacitores ligados em paralelo constituem um sistema elétrico análogo a este).

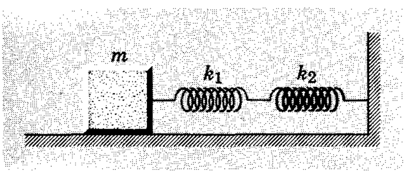

Fig. 15-22

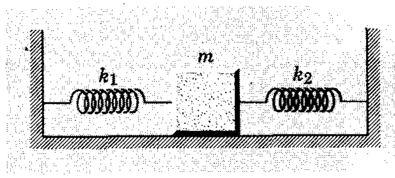

Fig. 15-23

11. As duas molas do problema anterior são agora ligadas a m e ligadas a suportes fixos como indica a Fig. 15-23. Mostrar que a freqüência de oscilação neste caso é

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

(Dois capacitores ligados em série formam um sistema elétrico análogo a este).

12. As freqüências de vibração dos átomos em sólidos, a temperaturas habituais, são da ordem de 10^{13} Hz. Imagine que os átomos estejam ligados entre si por meio de molas. Suponhamos que um único átomo de prata vibre com esta freqüência e que todos os outros estejam em repouso. Determine a constante elástica de uma única mola. Um mol de prata tem massa de 108 g e contém $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos.

13. O extremo de um dos ramos de um diapasão que executa movimento harmônico simples, cuja freqüência é de 1.000 Hz, tem amplitude de 0,40 mm. Desprezando o amortecimento, calcular: (*a*) a aceleração máxima e a velocidade máxima da extremidade do diapasão; (*b*) a velocidade e a aceleração da mesma extremidade, quando seu deslocamento for de 0,20 mm.

14. Uma mola, cuja constante elástica é de 19,6 N/m, está suspensa verticalmente. Um corpo de 0,20 kg é colocado em sua extremidade livre e largado. Suponha que a mola estivesse sem distensão antes de largar o corpo; determine de quanto desce o corpo, em relação à posição inicial. Determinar também a freqüência e a amplitude do movimento harmônico simples resultante.

15. Um bloco de 4,0 kg está suspenso de uma mola cuja constante elástica é de 16 N/m. Uma bala que pesa 0,45 N é disparada sobre o bloco, de baixo para cima, com velocidade de 150 m/s, ficando incrustada nele. (*a*) Determinar a amplitude do movimento harmônico simples resultante. (*b*) Que fração da energia cinética original da bala é armazenada no oscilador harmônico? Há perda de energia nesse processo? Explique sua resposta.

16. Quanto às oscilações verticais, um automóvel pode considerar-se montado sobre uma mola. Em certo carro as molas são ajustadas para a freqüência de 3,0 Hz. Qual a constante elástica da mola se o carro pesa 1.600 kgf? Qual será a freqüência de vibração se no carro subirem cinco passageiros, cada um de 80 kg?

17. A escala de um dinamômetro tem 10 cm e ele pode medir de 0 a 16 kgf. Um pacote suspenso do dinamômetro oscila verticalmente com freqüência de 2,0 Hz. Quanto pesa o pacote?

18. Partindo da Eq. 15-17 para a conservação da energia (sendo $\frac{1}{2}kA^2 = E$), obter o deslocamento em função do tempo, por integração da Eq. 15-18; compare com esta.

19. Quando o deslocamento de uma partícula em movimento harmônico simples for igual à metade da amplitude, que fração de sua energia é cinética e que fração é potencial? Para que valor do deslocamento metade da energia será cinética e metade potencial?

20. (*a*) Provar que no movimento harmônico simples a energia potencial média é igual à energia cinética média, quando se calcula a média em relação ao tempo, para um período do movimento, e que cada média vale $\frac{1}{4}kA^2$ (ver Fig. 15-9*a*). (*b*) Provar que, tomando a média em relação à posição, em um ciclo, a energia potencial média vale $\frac{1}{6}kA^2$ e a energia cinética média $\frac{1}{3}kA^2$ (ver Fig. 15-9*b*). (*c*) Explicar fisicamente por que os dois resultados anteriores são diferentes.

21. (*a*) Mostrar que as relações gerais para o período e a freqüência de qualquer movimento harmônico simples linear são

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{x}{a}} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{a}{x}}.$$

(*b*) Mostrar que as relações gerais para o período e a freqüência de qualquer movimento harmônico simples angular são

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{\theta}{\alpha}} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{\alpha}{\theta}}.$$

22. *Mola vertical em um campo gravitacional uniforme.* Consideremos uma mola sem massa, de constante elástica k, situada em um campo gravitacional uniforme. Suponhamos uma massa m suspensa da mola. (*a*) Mostrar que, sendo $x = 0$ a posição da extremidade da mola sem carga, a posição de equilíbrio estático é dada por $x = mg/k$ (ver Fig. 15-24). (*b*) Mostrar que a equação de movimento do sistema mola-massa é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

e que a solução para o deslocamento como função do tempo é $x = A\cos(\omega t + \delta) + mg/k$, sendo $\omega = \sqrt{k/m}$, como antes. (*c*) Mostrar, portanto, que os valores de ω, v, a, ν e T, em um campo gravitacional, são os mesmos que na ausência dele, com a única diferença de a posição de equilíbrio ter sido deslocada de mg/k. (*d*) Considere agora a energia do sistema, $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h - x) =$ constante e mostre que, diferenciando em relação ao tempo obtém-se a equação de movimento da parte (*b*). (*e*) Mostre que, se a massa cair de $x = 0$ à posição de equilíbrio estático, $x = mg/k$, a perda de energia potencial gravitacional transforma-se metade em energia potencial elástica e metade em energia cinética. (*f*) Considere, finalmente, o sistema em movimento na posição de equilíbrio estático. Calcular separadamente a variação da energia potencial gravitacional e da energia potencial elástica quando a massa m se mover *para cima* até o deslocamento $+A$ e tam-

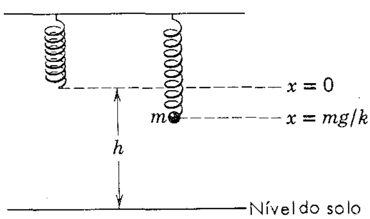

Fig. 15-24

bém quando ela se mover *para baixo* até o deslocamento $-A$. Mostre que a variação *total* de energia potencial é a mesma em cada caso, isto é, $\frac{1}{2}kA^2$. Em vista dos resultados (*c*) e (*f*), pode-se simplesmente ignorar o campo gravitacional uniforme na análise, simplesmente deslocando a posição de referência de $x = 0$ para $x_0 = x - mg/k = 0$. A nova curva de energia potencial $[U(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \text{constante}]$ tem a mesma forma parabólica que na ausência de um campo gravitacional $[U(x) = \frac{1}{2}kx^2]$.

23. Um pêndulo simples, de 1,00 m de comprimento, realiza 100 oscilações completas em 204 segundos, em certo lugar. Qual o valor da aceleração da gravidade nesse local?

24. Qual o comprimento de um pêndulo simples cujo período é exatamente de 1 segundo em um ponto onde $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$?

25. Mostrar que a tensão máxima no fio de um pêndulo físico, quando a amplitude θ_m for pequena, é $mg\,(1 + \theta_m^2)$ Para que posição do pêndulo a tensão será máxima?

26. Qual a freqüência de um pêndulo simples de 2,0 m de comprimento? (*b*) Supondo que as amplitudes sejam pequenas, qual seria sua freqüência em um elevador que sobe com aceleração de $2{,}0\ \text{m/s}^2$? (*c*) Qual seria sua freqüência em queda livre?

27. Um pêndulo simples de comprimento l e massa m está suspenso de um carro que se move, com velocidade constante v, em um círculo de raio R. Se o pêndulo executa pequenas vibrações em torno de sua posição de equilíbrio, qual será sua freqüência de oscilação?

28. Qual o período de um pêndulo formado por uma régua de um metro que pode girar em torno de um eixo que passe por uma das extremidades? E se o eixo passar no traço dos 75 cm? e dos 60 cm?

29. Mostrar que, se uma régua uniforme de comprimento l for montada de forma a girar em torno de um eixo horizontal perpendicular à regua e à distância d do centro de massa, o período terá valor *mínimo* quando $d = l/\sqrt{12} = 0{,}289\,l$.

30. Um disco de 1,0 m de diâmetro é cortado de uma lâmina metálica. O disco gira como pêndulo, em torno de um prego fixado em uma parede e que passa por um orifício do disco. Seja l a distância do prego ao centro do disco. (*a*) Para que valor(es) o período será de 1,7 s? (*b*) Suponha que você deseje um período tão pequeno quanto possível. Que valor de l deverá ser usado?

31. Um aro circular cujo raio é de 60 cm e pesando 4,0 kgf está suspenso de um prego horizontal. (*a*) Qual sua freqüência de oscilação para pequenos deslocamentos em relação à posição de equilíbrio? (*b*) Qual o comprimento do pêndulo simples equivalente?

32. Uma esfera maciça de 2,0 kg e diâmetro de 0,30 m está suspensa de um arame. Determinar o período das pequenas oscilações angulares, sendo de $6{,}0 \times 10^{-3}\ \text{N.m/rad}$ o torque necessário para torcer o fio.

33. O volante de um relógio vibra com amplitude angular de π radianos e período de 0,50 s. Determinar (*a*) sua velocidade angular máxima; (*b*) sua velocidade angular quando o deslocamento for de $\pi/2$ radianos, e (*c*) sua aceleração angular quando seu deslocamento for de $\pi/4$ rad.

34. Em um osciloscópio os elétrons são defletidos por dois campos elétricos perpendiculares entre si, de tal modo que, a qualquer instante, o deslocamento é dado por

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = A\cos(\omega t + \alpha).$$

(*a*) Descrever a trajetória dos elétrons e determinar sua equação quando $\alpha = 0°$, (*b*) quando $\alpha = 30°$ e (*c*) quando $\alpha = 90°$.

35. *Figuras de Lissajous.* Superpondo oscilações de direções perpendiculares, as freqüências dos movimentos nas direções Ox e Oy não devem ser necessariamente iguais; portanto, no caso geral a Eq. 15-30 transforma-se em

$$x = A_x\cos(\omega_x t + \delta) \quad \text{e} \quad y = A_y\cos(\omega_y t + \alpha).$$

A trajetória da partícula não é mais uma elipse, mas uma curva denominada *figura de Lissajous*, em honra de Jules Antoine Lissajous (1822-1880), que pela primeira vez demonstrou tais curvas em 1857. (*a*) Se ω_x/ω_y for um número racional, de forma que as freqüências angulares são "comensuráveis", então a curva é fechada e o movimento se repete a intervalos de tempo iguais. Suponha $A_x = A_y$ e $\delta = \alpha$; desenhe a curva de Lissajous para $\omega_x/\omega_y = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. (*b*) Suponha ω_x/ω_y um número racional, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$, por exemplo, e mostre que a forma da figura de Lissajous depende da diferença de fase $\alpha - \delta$. Desenhe as curvas para $\alpha - \delta = 0$, $\pi/4$ e $\pi/2$ radianos. (*c*) Se ω_x/ω_y não for um número racional, então a curva é "aberta". Convença-se de que, após um longo tempo, a curva terá passado por qualquer ponto do retângulo limitado por $x = \pm A_x$ e $y = \pm A_y$ e que a partícula nunca passará duas vezes pelo mesmo ponto, com a mesma velocidade.

36. Mostrar que, quando $m_2 \to \infty$, na Fig. 15-33, então $\mu \to m_1$. (*b*) Mostre que, em relação ao caso anterior, o efeito de uma parede não-infinita ($m_2 < \infty$) sobre as oscilações da massa m_1 ligada à extremidade de uma mola presa a ela é o de reduzir o período ou aumentar a freqüência das oscilações. (*c*) Mostrar que, quando $m_2 = m_1$, o efeito é o mesmo como se a mola fosse dividida ao meio, cada parte oscilando independentemente em torno do centro de massa, situado na metade da mola.

37. (*a*) Determinar a massa reduzida de cada uma das seguintes moléculas diatômicas: O_2, HCl, CO. Exprimir as respostas em unidades de massa atômica, sendo a massa do hidrogênio igual aproximadamente a 1,00 μ. (*b*) Sabe-se que a molécula de HCl vibra com a freqüência fundamental $\nu = 8{,}7 \times 10^{13}$ Hz. Qual a "constante elástica" k para as forças de acoplamento entre os átomos da molécula? Em termos de sua experiência com molas comuns, você diria que a "mola das moléculas" é relativamente dura ou não?

38. A mola da Fig. 15-17*a* tem constante elástica $k = 250$ N/m. Seja $m_1 = 1{,}0$ kg e $m_2 = 3{,}0$ kg. (*a*) Qual a freqüência de oscilação do sistema de dois corpos? (*b*) Qual a razão K_1/K_2 das suas energias cinéticas?

39. Mostrar que a energia cinética do oscilador de dois corpos, Fig. 15-17*a*, é expressa por $K = \frac{1}{2}\mu v^2$, sendo μ a massa reduzida e $v(=v_1 - v_2)$ a velocidade relativa. Note que o momento linear se conserva durante a oscilação do sistema.

40. Se a massa m_s de uma mola não for desprezível, comparada à massa m de um objeto suspenso dela, o período do movimento será $T = 2\pi\sqrt{(m + m_s/3)/k}$. Deduzir este resultado (*Sugestão*: a condição $m_s \ll m$ equivale a supor que a mola se distenda uniformemente ao longo de seu comprimento.)

41. (*a*) Imagine um cilindro maciço ligado a uma mola horizontal de massa nula; o cilindro pode *rolar sem escorregar* sobre a superfície, como na Fig. 15-25. A constante elástica da mola é $k = 3{,}0$ N/m. Desloca-se o sistema até a posição em que a mola se distende de 0,25 m, soltando-o em seguida. Calcular as energias cinéticas de translação e de rotação do cilindro quando ele passou pela posição de equilíbrio. (*b*) Mostrar que, nessas condições, o centro de massa do cilindro executa o movimento harmônico simples cujo período é

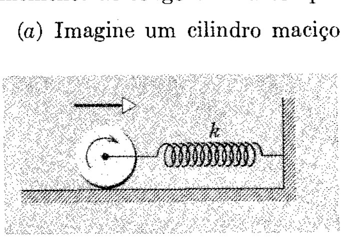

Fig. 15-25

$$T = 2\pi\sqrt{3M/2k}.$$

42. Partindo da Eq. 15-41, determinar a velocidade $v(= dx/dt)$ do movimento oscilatório forçado. Mostrar que a amplitude de velocidade é

$$v_m = F_m/[(m\omega'' - k/\omega'')^2 + b^2]^{1/2}.$$

As equações da Seç. 15-10 são idênticas, em forma, às que representam um circuito elétrico que contém uma resistência R, uma indutância L e uma capacitância C, em série com uma força eletromotriz alternada $V = V_m \cos \omega'' t$. Portanto, b, m, k e F_m são análogos respectivàmente a R, L, $1/C$ e V_m; x e v são análogos à carga elétrica q e à intensidade de corrente i, respectivamente. No caso elétrico, a amplitude de corrente, i_m, análoga à amplitude de velocidade v_m, acima definida, é utilizada para descrever a qualidade da ressonância.

43. Duas massas iguais, m, e três molas idênticas, de constante elástica k, são dispostas como indica a Fig. 15-26. (a) Sejam x_1, x_2 o deslocamento de cada massa em

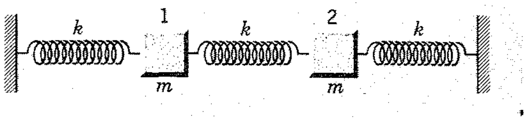

Fig. 15-26

relação à respectiva posição de equilíbrio. Mostrar que

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - 2x_1)$$

e

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_1 - 2x_2).$$

(b) Determinar as freqüências de vibração do sistema, supondo para as equações soluções da forma $x_1 = A_1 \operatorname{sen} \omega t$ e $x_2 = A_2 \operatorname{sen} \omega t$.